

УДК 681.3.06

ПРИМІТИВНА ПРОГРАМНА АЛГЕБРА ОБЧИСЛЮВАНИХ ФУНКЦІЙ НА МНОЖИНІ ГРАФІВ

Н.М. Снігур

Національний Технічний Університет України «Київський Політехнічний Інститут»

e-mail: nastena_sss@mail.ru

Однією з основних задач теорії програмування є формалізація семантики мов програмування. Згідно композиційного підходу семантикою будь-якої програми є функція, яка переводить множину вхідних даних в множину результатів і, таким чином, семантикою мови програмування виступає певний клас функцій. Для опису таких класів необхідно розглядати алгебру функцій, які в даному випадку називають програмною алгеброю. Вибір графових структур обумовлений їх важливістю і популярністю в прикладному і теоретичному програмуванні (особливо алгоритмів на графах) [1]. Діаграми мов моделювання (зокрема, UML), сукупності взаємозв'язаних і впорядкованих структур *Brwin*, *Egwin*, можуть бути представлені графовими засобами специфікації програм. Завданням роботи є здобуття опису класу обчислюваних граф-функцій.

Нижче викладені результати, що стосуються дослідження обчислюваних функцій та предикатів над графами. Обчислюваність вводиться згідно нумераційного підходу [2]. В якості інструменту дослідження вибрано апарат примітивних програмних алгебр (ППА). Основна увага приділена пошуку породжуючих множин. Зазначимо, що отримані результати доповнюють результати для векторних, матричних, реляційних та табличних функцій [3-5].

Основні поняття

Розглянемо ППА, носій якої складають n -арні функції і предикати [4] над графами для $n = 1, 2, \dots$. Сигнатуру ППА складають операції суперпозиції, розгалуження та $(n+1)$ -арного циклювання, що представляють собою адекватні уточнення стандартних структур управління алголоподібних мов програмування. Для зручності подальшого викладення та розуміння роботи видається корисним дати формальне визначення цих операцій (детально див. [6]).

1. Під *суперпозицією* мається на увазі $(m+1)$ -арна операція $S^{x_1 \dots x_m} : \langle f, f_1, \dots, f_n \rangle \rightarrow g$, де $g = f(x_1, \dots, x_{i-1}, f_1, \dots, x_{i_m-1}, f_m, \dots, x_n)$, $m \leq n$.
2. *Розгалуження* представляє собою $(m+1)$ -арну операцію таку, що $\diamond^{m+1} : \langle h, f_1, \dots, f_m \rangle \rightarrow g$, де $h(x_1, \dots, x_n)$ – функція, із скінченною множиною значень $\{h_1, \dots, h_m\}$ та $g(x_1, \dots, x_n) = f_i(x_1, \dots, x_n)$, якщо $h(x_1, \dots, x_n) = h_i$.
3. Нарешті *циклювання* задається так: $\ast_{y_1 \dots y_n} : \langle p, f_1, \dots, f_n \rangle \rightarrow g$, де p – предикат, а f_i, g – функції. Значення $g(x_1, \dots, x_n)$ визначається наступним чином. Розглянемо послідовність кортежів $\{(y_i^1, \dots, y_i^n), i = 0, 1, \dots\}$, де $y_0^j := x_j$, $y_{i+1}^j := f_j(y_i^1, \dots, y_i^n)$, $i = 0, 1, \dots, j = \overline{1, n}$. Знайдемо перший кортеж $(y_k^1, \dots, y_k^n)$ такий, що $p(y_k^1, \dots, y_k^n) = \text{false}$. Покладемо $g(x_1, \dots, x_n) = y_k^1$. (Якщо такого кортежу в послідовності не існує, то $g(x_1, \dots, x_n)$ вважається невизначеним).

Позначимо сукупність цих трьох операцій через Ω , а під $[\sigma_G]_\Omega$ будемо розуміти замикання множини σ операціями із Ω .

Означення 1. Під (скінченим) **орієнтованим графом** g (див. [1]) будемо розуміти сукупність двох множин – непорожньої зліченої множини V (множини *вершин*) та множини E впорядкованих пар різних елементів V (множини *ребер* або *дуг*), яка, взагалі кажучи, може бути й порожньою:

$$g = \langle V, E \rangle, \quad V \neq \emptyset, \quad E \subset V \times V.$$

При цьому якщо $v_1, v_2 \in V$ та $e = (v_1, v_2) \in E$, то дуга e вважається *додатно інцидентною* вершині v_2 та *від'ємно інцидентною* вершині v_1 . Будемо також казати, що вершина v_2 *від'ємно інцидентна* вершині v_1 .

Нижче будемо розглядати скінчені орієнтовані псевдографи (т. б. граfi з дугами, які з'єднують вершину саму з собою). Множину всіх таких графів позначимо через G .

Далі під функціями розуміємо часткові функції з аргументами і значеннями із G , а під предикатами – також часткові предикати на G . Через A_G^{cp} позначимо ППА, носій якої складають всі багатомісні частково-рекурсивні функції і предикати на G .

В силу зліченості множини V не буде суттєвим обмеженням, якщо покласти $V = N$. При цьому на множині вершин графа вводиться цілком природна впорядкованість. Оскільки розглядаються скінчені граfi з вершинами, що належать зліченій множині N , то очевидно, що множина всіх таких графів також є зліченою, а отже повинна існувати її ефективна нумерація $\alpha_G : N \rightarrow G$ (визначення в сенсі [7]).

ППА чр-функцій і чр-предикатів на множині скінчених орієнтованих графів

Розглянемо наступні функції на множині графів (граф-функції):

1. C_0^G – константна функція: $C_0^G(g) = g_0^1$ ($g_0^1 = \langle \{1\}, \square \rangle$ – нульовий граф);
2. S_G – збільшення на одиницю номера першої вершини (кореня) графа;
3. $\cup$ – об'єднання графів (об'єднання множин вершин та дуг);
4. $\setminus$ – різниця графів (різниця множин);
5. E_e – виділення першої дуги (підграфа з двох вершин та дуги);
6. R – утотоження кореня графа з першою від'ємно інцидентною вершиною;
7. A – стягування кореня графа з першою від'ємно інцидентною вершиною;
8. $\cup^*$ – об'єднання графів g_1 та g_2 із додаванням дуги із кореня g_1 в корінь g_2 ;
9. E_v – виділення кореня графа;

Покладемо

$$\sigma_G := \{C_0^G, S_G, \cup, \setminus, E_e, R, A, \cup^*, E_v, =_G, I_m^n\}_{m=1,2,\dots}^{n=1,2,\dots},$$

де $I_m^n, m = 1, \dots, n, n = 1, 2, \dots$ – селекторні функції.

Будь-якому графу поставимо у відповідність вектор наступним чином:

1. Першим елементом поставимо номер першої вершини (кореня графа).
2. Далі перерахуємо усі від'ємно інцидентні їй вершини.
3. Поставимо нуль.
4. Якщо вершина не має від'ємно інцидентних дуг, то її пропускаємо.
5. Повторюємо той самий процес для усіх вершин графа.
6. В кінці перерахуємо номери усіх ізольованих вершин, також розділяючи їх нулями.

Позначимо це відображення через $\phi : G \rightarrow N^*$, $N^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} N^i$, де $N^0 = \{\Lambda\}$ – порожній вектор. Очевидно, ϕ – ін'єкція, але не сюр'єкція. Позначимо, $V := \phi(G)$. Вочевидь, ця

множина є рекурсивною в нумерації α_G .

Тоді для будь-якої граф-функції $F: G^n \rightarrow G$ існує її **векторний образ** $F: N^* \rightarrow N$ такий що $F(\phi(g_1), \dots, \phi(g_n)) \cong \phi(F(g_1, \dots, g_n))$ для усіх $g_1, \dots, g_n$. Для предикатів аналогічно.

З метою моделювання векторних функцій граф-функціями побудемо кодуєче відображення $\Phi: N^* \rightarrow G$ наступним чином (тут Δ_G – порожній граф)

$$\Phi(\Lambda) = \Delta_G,$$

$$\Phi(v) = \langle \{1, \dots, n\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}, \{(1, v_1), \dots, (n, v_n)\} \rangle$$

Таким чином отримаємо, що для довільної векторної функції $F(x_1, \dots, x_n)$ функція $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$ є її **граф-моделлю**, якщо $F(\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n)) \cong \Phi(F(v_1, \dots, v_n))$ для всіх $v_1, \dots, v_n \subset N^*$. Аналогічно для предиката.

Легко показати, що для будь-яких векторних чр-функцій та чр-предикатів існують їх граф-моделі, які належать замиканню $[\sigma_G]_\Omega$.

Нехай $\psi := \phi \cdot \Phi$. Очевидно, що $\psi: G \rightarrow \Phi(V)$ – бієкція. Через χ позначимо яке-небудь розширення відображення ψ^{-1} . Граф-функції ψ та χ грають ролі кодуєчої та декодуєчої функцій відповідно.

Лема 1. Нехай $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$ – чр-граф-функція, а $H(\pi_1, \dots, \pi_n)$ – граф-модель векторного образу функції $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Тоді

$$F(A_1, \dots, A_n) = \chi(H(\psi(A_1), \dots, \psi(A_n)))$$

для усіх $A_i, i = \overline{1, n}$.

Аналогічно, нехай $P(\xi_1, \dots, \xi_m)$ – чр-граф-предикат, а $K(\pi_1, \dots, \pi_m)$ – граф-модель векторного образу цього предиката. Тоді

$$P(A_1, \dots, A_n) = K(\psi(A_1), \dots, \psi(A_n))$$

для усіх $A_i, i = \overline{1, n}$.

Основним результатом даного дослідження є така теорема.

Теорема 1. σ_G є породжуючою множиною алгебри A_G^{up} .

Література

1. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2000. – 304 с.
2. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М.: Наука, 1965. – 391 с.
3. Буй Д.Б., Редько В.Н. Прimitивные программные алгебры целочисленных и словарных функций // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 10. – С. 69-71.
4. Буй Д.Б., Мавлянов А.В. К теории программных алгебр // Укр. мат. журн. – 1984. – 36, № 6. – С. 761-764.
5. Буй Д.Б., Редько В.Н. Прimitивные программные алгебры. I, II // Кибернетика. – 1984. – № 5. – С. 1-7; – 1985. – № 1. – С.28-33.
6. Буй Д.Б. Прimitивные программные алгебры: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1985. – 22с.
7. Ершов Ю.Л. Теория нумераций. – М.: Наука, 1977. – 416 с.